Correction contrôle de mathématiques

du lundi 09 avril 2018

EXERCICE 1

Questions de cours **(5 points)**

1) a) Soit n un naturel tel que $n \geqslant 2$.
Si n n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$.

b) Si 317 est premier, il n'admet donc pas de facteurs premier tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$.
Comme $17 \leqslant \sqrt{317} \leqslant 18$, on teste les diviseurs premiers inférieurs à 18 soit :
2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17.

- D'après les règles de divisibilité 317 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 11.
- On fait les divisions euclidienne de 317 par 7, 13 et 17 :

$$317 = 7 \times 45 + 2 \quad , \quad 317 = 13 \times 24 + 5 \quad , \quad 317 = 17 \times 18 + 11$$

317 non divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, d'après le critère d'arrêt 317 est premier.

2) Cf cours.

3) On a :

$$\begin{array}{r|l} 27\,720 & 2 \\ 13\,860 & 2 \\ 6\,930 & 2 \\ 3\,465 & 3 \\ 1\,155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

On a alors : $27\,720 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

Le nombre de diviseurs est alors
$N = (3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 96$

EXERCICE 2

Nombres de Mersenne **(5 points)**

1) a) Le corollaire de Gauss affirme que « si a et b premiers entre eux divisent c alors le produit ab divise c ».
Or 3 et 4 premiers entre eux divisent $2^{33} - 1$ donc d'après le corollaire de Gauss $3 \times 4 = 12$ devrait diviser $2^{33} - 1$.

b) $2^{33} - 1 = 4 \times 2^{31} - 1 \equiv -1 \equiv 3\ [4]$.
Le reste de la division par 4 de $2^{33} - 1$ est 3 donc 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

Remarque : un calcul plus poussé donnerai : $(2^{33} - 1)/4 = 2\,147\,483\,647{,}75$

c) $2 \equiv -1\ [3]$, par puissance $2^{33} \equiv (-1)^{33} \equiv -1\ [3] \quad \Leftrightarrow \quad 2^{33} - 1 \equiv -2 \equiv 1\ [3]$.
Le reste de la division par 3 de $2^{33} - 1$ est 1, donc 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

Un calcul plus poussé donnerai : $(2^{33} - 1)/3 = 2\,863\,311\,530{,}33\ldots$

2) a) S est la somme de 11 premiers termes d'une suite géométrique de raison 2^3 et de premier terme 1, on a donc :

$$S = \frac{1-(2^3)^{11}}{1-2^3} = \frac{2^{33}-1}{7}$$

b) On a $2^{33} - 1 = 7S$, comme $S \in \mathbb{N}$, $2^{33} - 1$ est divisible par 7.

Exercice 3

Nombre de diviseurs **(4 points)**

1) $18n = (2 \times 3^2)\, n = 2 \times 3^2 \times 2^\alpha \times 3^\beta = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$.

2) Comme $18n$ a deux fois plus de diviseurs que n, on a :

$$(\alpha+2)(\beta+3) = 2(\alpha+1)(\beta+1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\beta + 3\alpha + 2\beta + 6 = 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \alpha = 4 \quad \Leftrightarrow \alpha(\beta - 1) = 4$$

3) 4 peut se décomposer en $4 = 1 \times 4$ ou $4 = 2 \times 2$, on obtient les choix suivants :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 1 = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 1 = 2 \end{cases}$$

On obtient les 3 couples (α, β) : $(1,5), (4,2), (2,3)$ ce qui donne 3 solutions pour n

$$n_1 = 2^1 3^5 = 486 \quad , \quad n_2 = 2^4 3^2 = 144 \quad , \quad n_3 = 2^2 3^3 = 108$$

Exercice 4

Triplets pythagoriciens **(6 points)**

1) (3,4,5) et (5, 12, 13) sont des TP car
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ et $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

2) a) $(px)^2 + (py)^2 = p^2x^2 + p^2y^2 = p^2(x^2 + y^2) \overset{(x,y,z)\ \text{TP}}{=} p^2z^2 = (pz)^2$

(px, py, pz) est donc un TP.

b) On a $\begin{array}{r|l} 2\,015 & 5 \\ 403 & 13 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$ donc $2\,015 = 5 \times 13 \times 31$.

c) $2015^2 = 5^2(13 \times 31)^2 \overset{(3,4,5)\ \text{TP}}{=} (3^2 + 4^2)(13 \times 31)^2 = (3 \times 13 \times 31)^2 + (4 \times 13 \times 31)^2$

$= 1\,209^2 + 1\,612^2$ donc $(1\,209\ ,\ 1\,612\ ,\ 2\,015)$ est un TP.

3) On pose $2n + 1 = 2\,015 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1\,007$. On a alors :

$2n^2 + 2n = 2 \times 1\,007^2 + 2 \times 1\,007 = 2\,030\,112$ et $2n^2 + 2n + 1 = 2\,030\,113$.

D'après l'égalité donnée $(2\,015\ ,\ 2\,030\,112\ ,\ 2\,030\,113)$ est un TP.

4) a) $z^2 - x^2 = 403^2 \quad \Leftrightarrow \quad (z-x)(z+x) = 403^2$ comme $x < 403$ alors $z > x$.

Comme $403^2 = 196 \times 961$ on obtient le système suivant : $\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases}$

On obtient les solutions : $z = \dfrac{169 + 961}{2} = 565$ et $x = \dfrac{961 - 169}{2} = 396$

b) De la question précédente, on a :

$$565^2 - 396^2 = 403^2 \overset{\times 5^2}{\Leftrightarrow} (5 \times 565)^2 - (5 \times 396)^2 = (5 \times 403)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2\,825^2 - 1\,980^2 = 2\,015^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1\,980^2 + 2\,015^2 = 2\,825^2$$

(1 980 , 2 015 , 2 825) est un TP.